L'indeterminisme en el càlcul i en la modelització matemàtica

Discurs de presentació de Marta Sanz-Solé
com a membre numerària de la Secció de Ciències
i Tecnologia, llegit el dia 14 de maig de 2018

Institut d'Estudis Catalans
SECCIÓ DE CIÈNCIES I TECNOLOGIA

L'indeterminisme en el càlcul i en la modelització matemàtica

L'indeterminisme en el càlcul i en la modelització matemàtica

Discurs de presentació de Marta Sanz-Solé
com a membre numerària de la Secció de Ciències
i Tecnologia, llegit el dia 14 de maig de 2018

Barcelona, 2018

Institut d'Estudis Catalans
SECCIÓ DE CIÈNCIES I TECNOLOGIA

Biblioteca de Catalunya. Dades CIP

Sanz, Marta, autor
L'Indeterminisme en el càlcul i en la modelització matemàtica. — Primera edició
Bibliografia
ISBN 9788499654096
I. Institut d'Estudis Catalans. Secció de Ciències i Tecnologia II. Títol
1. Anàlisi estocàstica 2. Moviment brownià, Processos de
519.216
530.162

Carrer del Carme, 47. 08001 Barcelona

Primera edició: maig del 2018

Text revisat lingüísticament per la Unitat de Correcció del Servei Editorial de l'IEC

Disseny de la coberta: Azcunce | Ventura

Compost per Rosa Rodríguez
Imprès a Open Print, SL

ISBN: 978-84-9965-409-6
Dipòsit Legal: B 8137-2018

1. Introducció

En aquest discurs fem una breu introducció a l'àrea de les matemàtiques anomenada *anàlisi estocàstica* o *càlcul estocàstic*. Ens adrecem a una audiència amb coneixements que abracin un ampli ventall científic, però no necessàriament matemàtic. Per aquest motiu, adoptem un estil descriptiu, de vegades informal, prioritzant l'objectiu didàctic i de comunicació per damunt de la profunditat i el rigor estricte.

L'inici del desenvolupament de l'anàlisi estocàstica se situa en els anys quaranta del segle passat, i és degut a Kyoshi Itô (vegeu [13, 14]), tot i que a partir de 1900 ja es troben alguns precedents remarcables (per exemple, [1]). Té, doncs, una història encara molt curta, sobretot en comparació amb altres especialitats de les matemàtiques. Malgrat això, l'ímpetu i la magnitud del seu creixement són incontestables, com també ho és l'increment de la seva influència i impacte en el món científic.

Els reconeixements en forma de premis a l'activitat científica en l'àmbit de l'anàlisi estocàstica són, lògicament, força recents. Destaquem la primera edició del Premi Carl Friedrich Gauss, concedit el 2006 a Kyoshi Itô (1915-2008); el Premi Abel 2007 guanyat per S. R. Srinivasa Varadhan, i, finalment, la Medalla Fields amb què Martin Hairer fou guardonat el 2014. La visibilitat i la publicitat conseqüència d'aquests (i d'altres) reconeixements han actuat com a factors de consolidació de l'àrea, han servit d'impuls per a nous descobriments i han fomentat una activitat intensa en noves línies de recerca.

Creiem, doncs, que és important contribuir a donar a conèixer millor aquesta nova especialitat de les probabilitats. Ho farem seguint al començament, com a idea guia, la contraposició entre la concepció determinista i la indeterminista del món físic, que aquí es concreten en el càlcul clàssic de Newton i Leibniz, i en el càlcul estocàstic d'Itô, respectivament. A la part final, veurem que la combinació d'enfocaments provinents de les dues concepcions està impulsant avenços espectaculars. En aquest sentit podem dir que l'exposició té una estructura espiral.

A continuació fem una descripció del contingut de les diferents seccions. En la secció 2 argumentem la necessitat d'un càlcul diferent del clàssic quan s'adopta una visió indeterminista de la realitat física. En la secció 3 introduïm el *moviment brownià*. És un objecte famós del conjunt de les funcions aleatòries que té un paper rellevant en la modelització matemàtica de sistemes dinàmics amb fortes fluctuacions. A banda del seu interès per a les aplicacions, és un objecte matemàticament fascinant i una font gairebé infinita de nous problemes, sempre difícils i engrescadors. El presentem des de dues perspectives diferents i complementàries: la física (deguda a Einstein [6] i Smoluchowski [24]) i la matemàtica de Paul Lévy ([18]), posant èmfasi en les múltiples connexions amb diverses àrees.

El *càlcul d'Itô* es basa en una integral estocàstica respecte al moviment brownià. En la secció 4 donem algunes idees de la construcció d'aquest objecte. Les oscil·lacions de les trajectòries del moviment brownià són molt més complexes que les d'una funció diferenciable. Això explica el caràcter innovador de la integral d'Itô i el seu comportament diferent en relació amb altres integrals deterministes, com la de Riemann o la de Lebesgue. En la secció 5 il·lustrem aquest fet mitjançant un exemple i esbossem alguns arguments que el justifiquen. Completem l'exposició del càlcul d'Itô amb una fórmula bàsica que és la versió aleatòria del teorema fonamental del càlcul, que relaciona derivades i primitives de funcions. Es tracta de la *fórmula d'Itô*, presentada en la secció 6. A banda de la importància pràctica, la seva deducció ajuda a entendre millor les diferències entre els càlculs determinista i estocàstic.

La culminació del càlcul d'Itô, i a la vegada la seva motivació, són les *equacions diferencials estocàstiques*. Comparant-les amb les equacions diferencials clàssiques, les estocàstiques incorporen termes addicionals que representen fluctuacions aleatòries. En molts casos proporcionen models que s'adapten millor a les observacions. La manera de donar-los sentit és a través de la integral estocàstica. En la secció 7 introduïm aquestes equacions i en donem alguns exemples, com el celebrat model de Black i Scholes en finances (vegeu [2]). La secció 8 es dedica a la discussió d'alguns aspectes de les equacions diferencials estocàstiques relacionats amb els processos aleatoris de Markov. Són propietats que tenen un alt interès teòric, en particular, per les seves relacions amb altres camps de les matemàtiques.

En les dues seccions finals fem un salt considerable, en el temps, i també en dificultat conceptual i de contingut. Les dediquem a descriure avenços recents en els quals es troba una combinació dels dos marcs —aleatori i determinista— de la modelització i les seves tècniques, i que han desembocat en la creació de noves teories. Ens referim al *càlcul amb trajectòries irregulars* de Terry Lyons ([19]), que exposem en la secció 9, i a la *teoria de les estructures regulars* de Martin Hairer ([12]), a la qual dediquem la secció 10. La primera s'aplica a l'estudi de sistemes complexos en dimensió finita, mentre que la segona està explícitament dissenyada per a l'anàlisi de sistemes en dimensió infinita, com els que es poden descriure mitjançant equacions en derivades parcials. Ambdues proporcionen instruments per assolir un grau de comprensió més profund de la realitat física i un ventall d'aplicacions més ampli del que havia estat possible abans de la seva existència.

2. Què és l'anàlisi estocàstica?

Per fer-nos una primera idea de què és l'anàlisi estocàstica, és útil retrocedir en el temps fins a la creació del càlcul infinitesimal, gairebé simultàniament, per Newton (1643-1727) i per Leibniz (1646-1716), ambdós matemàtics, físics i filòsofs il·lustres. En el cas de Newton, el càlcul es troba recollit en el seu *Tractat de les fluxions i les sèries infinites*. Basant-se en aquest càlcul, va poder formular amb ple sentit expressions que avui identifiquem com a *equacions diferencials*, les quals proporcionen models per a la interacció de sistemes i la predicció de les òrbites dels planetes, entre molts altres fenòmens.

Molts fenòmens, físics, biològics, etc., es descriuen i s'entenen amb l'ajut de les equacions diferencials. Per exemple,

$$\begin{aligned} \frac{dp(t)}{dt} &= ap(t), \quad t \in (0,\infty), \\ p(0) &= p_0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

és una equació diferencial que descriu la llei de Malthus de creixement de poblacions. En (2.1), la funció $t \mapsto p(t)$ designa la població d'una determinada espècie a l'instant $t > 0$ i a és una constant coneguda que depèn de la població.

Després de les equacions diferencials, es descobriren les *equacions en derivades parcials*. Un exemple paradigmàtic d'equació en derivades parcials és l'equació de difusió o *equació de la calor*,

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial t} f(t,x) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ f(0,x) = \delta_0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{2.2}$$

En aquesta expressió, δ_0 representa la mesura de Dirac en zero —la mesura que concentra una massa unitat en el punt $x = 0$. La funció $f\colon [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesura la intensitat de la calor a l'instant t, en el punt de coordenada x d'una barra (idealment) unidimensional, suposant que, en $t = 0$, s'ha partit d'una intensitat 1 en el punt $x = 0$.

L'equació de la calor expressa el fenomen de transferència d'energia formulat pel matemàtic francès Jean Baptiste Fourier (1768-1830).

A través d'aquests exemples elementals, veiem que els objectes als quals s'aplica el càlcul infinitesimal són funcions en el sentit clàssic i, endemés, són prou regulars. En les equacions diferencials aquestes funcions depenen del temps; en les equacions en derivades parcials depenen del temps i l'espai. A més, se suposa que són diferenciables per tal que expressions com (2.1) i (2.2) tinguin sentit.

En la teoria de la probabilitat, la noció anàloga a *funció* és la de *procés estocàstic* o aleatori, que, a partir d'ara, anomenarem sovint *procés*. Un procés és, com una funció, una aplicació, però en la qual hi ha un argument addicional que representa l'atzar.

Recordem que una variable aleatòria fa una assignació numèrica als resultats d'una experiència aleatòria estàtica. En el llenguatge de la teoria de la probabilitat, donat un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, una variable aleatòria és una aplicació $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable respecte a la σ-àlgebra $\mathcal{F}$ dels esdeveniments. Aleshores, un procés estocàstic és una família de variables aleatòries $(X_i,\ i \in I)$, on I és un conjunt de paràmetres. El concepte té la motivació en la descripció d'evolucions temporals de fenòmens aleatoris. Així, si el paràmetre i representa el temps, considerarem $I = [0,\infty)$ i un procés $(X_t,\ t \in [0,\infty))$ es descriu com una aplicació

$$\begin{aligned} X\colon [0,\infty) \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,\omega) &\longrightarrow X_t(\omega). \end{aligned}$$

Utilitzarem indistintament la notació $X_t(\omega)$ o $X(t, \omega)$ per referir-nos a la imatge de (t, ω) per X.

Observem que fixant $\omega \in \Omega$, que en modelització aleatòria correspon a fixar una observació, obtenim la funció (determinista) $t \in [0, \infty) \mapsto X_t(\omega)$, que s'anomena *trajectòria del procés* per l'observació ω o, simplement, *trajectòria*.

Com veurem ben aviat, hi ha exemples importants de processos amb trajectòries molt irregulars. Un cas emblemàtic és el moviment brownià, les trajectòries del qual no són diferenciables en cap punt. En modelització, aquests són els processos més utilitzats, donat que l'aleatorietat porta lògicament a variacions grans i complexes. En aquest context, el càlcul infinitesimal de Newton no pot aplicar-se.

El càlcul estocàstic, originat en els treballs de Kyoshi Itô dels anys quaranta, és un càlcul integral per a processos estocàstics, les trajectòries dels quals poden ser molt irregulars. És una extensió del càlcul integral clàssic. En un sentit que anirem desenvolupant al llarg d'aquesta presentació, podem dir que és el càlcul del món modern.

FOTOGRAFIA 1. Kyoshi Itô (1995). RIMS, Universitat de Kyoto. Conferència commemorativa del seu vuitanta aniversari.
FONT: Societat Matemàtica del Japó. Cortesia de la família Itô.

3. Processos amb trajectòries irregulars: el moviment brownià

Hi ha exemples de processos estocàstics que tot i ser molt interessants per a les aplicacions, no ho són tant des de la perspectiva del càlcul estocàstic. Un exemple n'és el procés de Poisson, que compta el nombre d'esdeveniments en l'interval de temps $[0, t]$, $t \geq 0$, que es produeixen en instants aleatoris. Les trajectòries del procés de Poisson són funcions constants en intervals aleatoris; en l'extrem esquerre d'aquests intervals es produeix un salt d'una unitat d'amplitud. El càlcul d'integrals respecte a un procés de Poisson es pot fer trajectòria a trajectòria utilitzant les teories d'integració determinista (per exemple, la integral de Lebesgue).

Des d'una òptica matemàtica, els processos més interessants són els que tenen trajectòries molt irregulars. En aquesta secció introduïm un exemple fonamental: el moviment brownià. El nom *moviment brownià* prové de les observacions de les trajectòries erràtiques i inestables de partícules de pol·len en suspensió en un líquid efectuades pel botànic escocès Robert Brown (1773-1858). De fet, el biòleg i químic holandès Jan Ingenhousz (1730-1799) també s'havia interessat per observacions d'un fenomen similar en considerar partícules de carbó en una superfície d'alcohol.

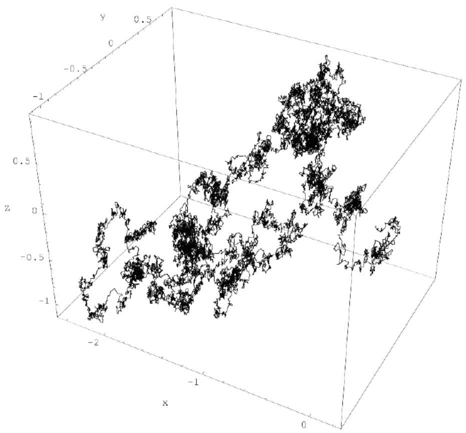


Figura 1. Trajectòria d'una partícula browniana.
Autor: T. J. Sullivan.
Font: English Wikipedia.

3.1. *El moviment brownià segons Einstein i Smoluchowski*

La primera teoria científica sobre el moviment brownià trigaria a elaborar-se. És deguda simultàniament i independentment a Einstein (1905) i Smoluchowski (1906), els quals van postular que els moviments aleatoris de les partícules són produïts per les col·lisions amb les partícules dels fluids. Tots dos científics van provar que la distribució de probabilitat de la posició de la partícula és la solució de l'equació de la calor (2.2),

$$f(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right), \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Això dona una descripció del procés aleatori del moviment de les partícules de la manera següent. Sembla difícil poder respondre amb precisió on es trobarà la partícula en un instant donat, però, alternativament, podem preguntar-nos per la probabilitat que es trobi en una determinada regió. Aquesta probabilitat pot calcular-se a partir de la densitat $x \mapsto f(t,x)$. Endemés, es dedueix que la intensitat d'ocupació de la partícula, en transcórrer el temps, té un comportament difusiu. Ben segur que el lector ha reconegut la funció $f(t,x)$ com la densitat d'una variable aleatòria normal (o gaussiana) amb mitjana zero i variància t, que designem amb $N(0,t)$. Aleshores, com que en augmentar t la variància creix, la densitat es difon al voltant del valor mitjà de la distribució de probabilitat.

La relació entre el moviment brownià i el fenomen físic de la difusió de la calor no és exclusiva d'aquest procés. Més endavant veurem que és un fet compartit pels processos que són solucions d'equacions diferencials estocàstiques.

3.2. *El moviment brownià segons Paul Lévy*

Una classe important de processos estocàstics és la dels *processos gaussians*, que són aquells pels quals la llei de probabilitat d'un nombre qualsevol (m) de variables aleatòries $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_m})$ del procés és una normal multidimensional. L'exemple més rellevant és el que definim tot seguit.

Un *moviment brownià* (B_t, $t \in [0, \infty)$) és un procés gaussià que compleix

1. $B_0 = 0$, quasi segurament (q. s.);
2. té trajectòries contínues;
3. té increments independents;
4. els increments $B_t - B_s$, $0 \leq s < t$ són variables aleatòries amb llei $N(0, t - s)$.

Aquesta definició es troba en l'obra científica de Paul Lévy (1886-1971), un matemàtic que va estudiar extensament el moviment brownià (vegeu, per exemple, [18]) i altres processos més generals anomenats *processos de Lévy*, en referència a les seves aportacions.

Observem que, en la definició anterior, s'imposa la continuïtat de les trajectòries. És una condició natural per descriure un moviment de partícules. Paul Lévy va donar una construcció explícita del moviment brownià utilitzant la base ortonormal de $L^2[0, 1]$ formada per les funcions de Haar, que són l'exemple més senzill d'ondetes. Les ondetes serveixen per descompondre i codificar els senyals (lluminosos, acústics, etc.). Paul Lévy demostrà que el moviment brownià s'obté com la suma d'una sèrie absolutament convergent amb coeficients que són producte de dos factors: integrals de la base de Haar i variables aleatòries amb distribució normal estàndard. L'elecció d'aquestes últimes fa que els coeficients siguin variables aleatòries independents i el tipus de convergència dona la continuïtat de les trajectòries. Aquest aspecte del moviment brownià com a senyal és important en la modelització matemàtica i estableix relacions entre la probabilitat i l'anàlisi harmònica.

Cal esmentar que Norbert Wiener (1894-1964), el pare de la cibernètica, va contribuir també a l'estudi del moviment brownià, elucidant la seva estructura hilbertiana.

3.3. *El moviment brownià i el principi d'universalitat*

Un dels resultats fonamentals de la teoria bàsica de la probabilitat, juntament amb la llei forta dels grans nombres, és el teorema del límit central. La primera versió d'aquest teorema és deguda a Abraham de Moivre (1667-1754) i s'aplica a successions de variables aleatòries binomials. En versions posteriors i més generals, aquest teorema estableix que si $(X_n,\, n \in \mathbb{N})$ és una successió de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes, amb variància $\sigma^2 > 0$ i mitjana m, la successió de mitjanes aritmètiques $\bar{X}_n := \left(\frac{\sum_{j=1}^n X_j}{n}\right)$ compleix

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - m) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} Y,$$

o, equivalentment,

$$\frac{\sum_{j=1}^n X_j - nm}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} Y,$$

on la convergència és en distribució (és a dir, la successió de funcions de distribució de $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - m)$ convergeix cap a la funció de distribució de Y) i Y és una variable aleatòria amb llei $N(0,1)$.

Aquest és un teorema de tipus *universal* en el sentit que, independentment del tipus d'aleatorietat de la successió inicial, la successió de les mitjanes aritmètiques, convenientment normalitzades, convergeix invariablement cap a una llei normal.

El moviment brownià també té aquesta propietat de límit universal, com precisem més endavant. Aquest fet, demostrat per Donsker, indica que el moviment brownià es pot considerar com una versió en dimensió infinita d'una variable aleatòria normal.

Considerem la successió de variables aleatòries $(X_n,\, n \in \mathbb{N})$ introduïda més amunt. Suposem, per simplificar, que $m = 0$ i posem $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$. Definim ara un procés estocàstic indexat per $t \in [0,\infty)$, obtingut mitjançant interpolació lineal de $\{S_n,\, n \geq 0\}$:

$$Y_t = S_{[t]} + (t - [t])X_{[t]+1}, \tag{3.2}$$

on $[t]$ designa la part entera de t.

Introduïm ara una normalització de $\{Y_t,\, t \geq 0\}$. Per analogia amb el teorema del límit central, definim

$$B_t^{(n)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} Y_{nt}, \quad t \geq 0. \tag{3.3}$$

El teorema de Donsker estableix que $\{B_t^{(n)},\ t \geq 0\}$, $n \geq 1$, convergeix en distribució cap a la llei d'un moviment brownià. Cal precisar que, en aquest teorema, (3.3) es considera com una successió de vectors aleatoris a valors en l'espai de les funcions contínues nul·les en zero, dotat de la topologia de la convergència uniforme sobre compactes, i la convergència en distribució es refereix a la convergència de les lleis d'aquests vectors aleatoris cap a la llei del moviment brownià. És a dir, aquí, els vectors aleatoris prenen valors en l'espai de les trajectòries.

En considerar el cas particular

$$X_n = \begin{cases} 1, & \text{amb probabilitat } \dfrac{1}{2}, \\ -1, & \text{amb probabilitat } \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

el resultat de Donsker diu que el moviment brownià s'obté com a límit en distribució de la passejada aleatòria sobre els enters, convenientment normalitzada.

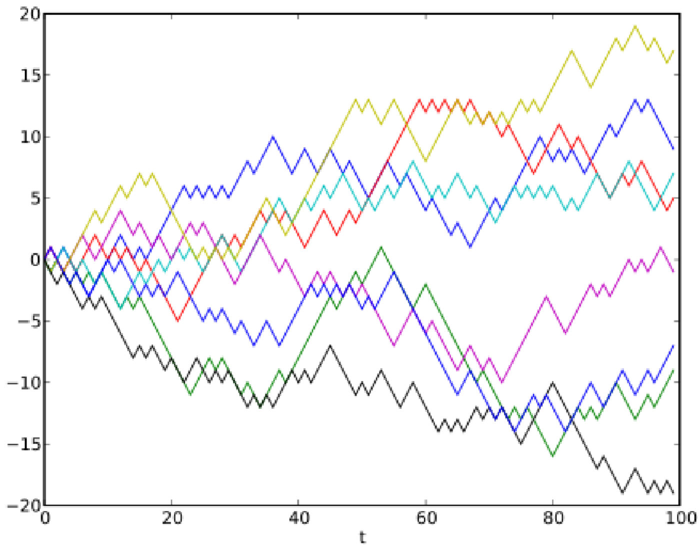


Figura 2. Vuit trajectòries interpolades d'una passejada aleatòria.
Autor: Morn (talk).
Font: English Wikipedia.

Recapitulant, hem vist el rol important del moviment brownià en la modelització física, la seva descripció probabilista i el seu caràcter universal, similar al de la llei normal en dimensió finita. Convé esmentar que l'any 1900, abans que Einstein publiqués la seva teoria sobre el moviment brownià, Louis Bachelier, matemàtic francès, va presentar la seva tesi doctoral (vegeu [1]), on es descriu un mecanisme aleatori d'evolució del valor d'actius financers i es demostra que la llei de probabilitat dels valors és solució de l'equació de la calor (2.2). Més endavant veurem que el model de Bachelier és un exemple d'equació diferencial estocàstica.

4. La teoria d'Itô de la integral estocàstica

A partir del teorema de Donsker s'intueix que les trajectòries del moviment brownià canvien molt sovint de direcció. Paley, Wiener i Zygmund van demostrar (1933) que no són diferenciables en cap punt (quasi segurament). El comportament quantitatiu de les seves oscil·lacions està perfectament determinat. En efecte, quasi segurament, les trajectòries del moviment brownià són funcions Hölder contínues de grau $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, i aquesta propietat és falsa per a $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Això vol dir que

$$\sup_{s\neq t} \frac{|B_t - B_s|}{|t-s|^\alpha} \begin{cases} < \infty, & \alpha \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right), \\ = \infty, & \alpha \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Designem amb $\int_0^T F(s)\, dX(s)$ la integral de F respecte de X en l'interval $[0, T]$. En aquest moment, evitem deliberadament descriure què són els objectes F i X, per bé que els donem un nom —*integrand* i *integrador*, respectivament.

En aquesta exposició convé classificar les teories d'integració clàssiques en dos grups: les derivades directament del càlcul de Newton, en les quals X és una funció, i la integral de Lebesgue, en la qual X és una mesura. En les primeres, cal exigir que X tingui variació total fitada (integral de Lebesgue-Stieltjes). Cap d'aquestes teories no pot aplicar-se a les trajectòries del moviment brownià, ja que ni tenen variació total fitada, ni defineixen una mesura (aleatòria). D'aquí la necessitat d'una nova teoria d'integració genuïnament aleatòria, que s'anomena *teoria d'integració estocàstica*.

Encara que aquí ens centrarem en la integral estocàstica respecte del moviment brownià, volem mencionar que la teoria més general d'integració estocàstica considera com a integradors processos estocàstics que es descomponen en la suma d'una martingala i d'un procés amb trajectòries de variació total fitada. S'anomenen *semimartingales.* Les martingales són processos que modelitzen evolucions que mantenen el valor mitjà constant al llarg del temps. El moviment brownià és un exemple de martingala. Per als processos amb trajectòries contínues, les dues propietats, martingala i variació fitada, són excloents: si un procés té les dues propietats, ha de ser constant.

Les semimartingales són una classe tancada per a la integració estocàstica. És a dir, la integral estocàstica indefinida respecte d'una semimartingala és també una semimartingala. A banda d'aquesta propietat de robustesa, és una classe natural en modelització matemàtica on la variable de control, X, pot ser un senyal pertorbat per un soroll aleatori. El senyal pur es podria identificar amb una funció de variació total fitada i el soroll aleatori amb una martingala.

Si escrivim la descomposició del procés com a $X = M + V$, és natural definir la integral com la suma de les integrals respecte de M i de V. Amb la teoria clàssica podem donar sentit a la segona. Queda, doncs, explicar com definim la primera, prenent com a martingala de referència el moviment brownià, tal com ho va fer Itô en [13].

4.1. *Integral estocàstica respecte del moviment brownià*

Juntament amb l'espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de referència on tenim definits tots els elements aleatoris, fixem un interval de paràmetres $[0, T]$ i considerem una *filtració* $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$, és a dir, una família creixent de σ-àlgebres contingudes en $\mathcal{F}$ que compleixen certes condicions tècniques que no detallem. Per cada $t \in [0, T]$, $\mathcal{F}_t$ representa el conjunt d'esdeveniments que es poden descriure amb la informació que tenim fins a l'instant t. Introduïm la notació $L^2_{a,T}$ per designar el conjunt de processos estocàstics $(F(s),\ s \in [0,T])$ tals que:

1. Per tot $t \in [0,T]$, la variable aleatòria $F(t)$ és mesurable respecte de $\mathcal{F}_t$.

2. Es compleix la condició d'integrabilitat $E\Big(\int_0^T (F(s,\omega))^2\, ds\Big) < \infty$, on E designa l'esperança matemàtica o valor mitjà.

La primera propietat s'anomena *adaptabilitat*. Significa que l'aleatorietat de $F(t)$ està codificada únicament en el conjunt d'esdeveniments $\mathcal{F}_t$ i, per tant, no inclou cap coneixement sobre el futur.

Suposem que X és un moviment brownià, que designarem, com hem fet fins ara, amb B. El resultat fonamental d'Itô estableix que, per als processos de la classe $L^2_{a,T}$, es pot definir una integral estocàstica respecte de B. Sense aprofundir en els detalls, la construcció de la integral es pot descriure breument així. En primer lloc, es dona la definició d'integral per processos *simples*. Són els d'un subconjunt $\mathcal{E} \subset L^2_{a,T}$ que es poden escriure com a

$$F(t,\omega) = \sum_{k=1}^{r} F_k(\omega) 1_{(t_{k-1},t_k]}(t), \quad 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = T, \tag{4.1}$$

on cada F_k és una variable aleatòria $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$-mesurable i de quadrat integrable.

Per analogia amb la integral de Lebesgue (o d'altres), per a un procés F com el descrit en (4.1), la integral respecte de B es defineix mitjançant l'expressió

$$\int_0^T F(s,\omega)\, dB(s,\omega) := \sum_{k=1}^{r} F_k \Big[B(t_k,\omega) - B(t_{k-1},\omega)\Big]. \tag{4.2}$$

Observem que el terme de l'esquerra és una variable aleatòria que, per cada ω, té assignat el valor del terme de la dreta. Utilitzant la propietat essencial d'adaptabilitat, es demostra que $\int_0^T F(\omega,s)\, dB(t,\omega)$ té valor mitjà zero i variància (en aquest cas, moment de segon ordre) que coincideix amb el valor de $E\Big(\int_0^T (F(s,\omega))^2\, ds\Big)$. És a dir, l'aplicació

$$F \in \mathcal{E} \longmapsto \int_0^T F(s,\omega)\, dB(s,\omega)$$

és una isometria (una aplicació que conserva les normes) entre dos espais de funcions, el de les variables aleatòries de quadrat integrable $L^2(\Omega)$, i $L^2_{a,T}$.

Utilitzant teoremes d'aproximació força habituals en teoria de funcions, es demostra que si $F \in L^2_{a,T}$, existeix una successió $F_n \in \mathcal{E}$ que l'aproxima en el sentit següent:

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\int_0^T (F_n(s,\omega) - F(s,\omega))^2\, ds\right) = 0.$$

Per la propietat d'isometria que hem esmentat més amunt, resulta que, per tot procés $F \in L^2_{a,T}$, es pot definir

$$\int_0^T F(s,\omega)\, dB(s,\omega) = L^2(\Omega) \lim_{n\to\infty} \int_0^T F_n(s,\omega)\, dB(s,\omega). \tag{4.3}$$

Això dona una definició coherent, en el sentit que el valor de la integral estocàstica de l'esquerra no depèn de la successió que aproxima el procés F.

En la construcció anterior, el domini d'integració $[0,T]$ és fix. En considerar la família d'integrals estocàstiques $\Big(\int_0^t F(s,\omega)\, dB(s,\omega),$ $t \in [0,T]\Big)$, hom obté un procés estocàstic que s'anomena *integral indefinida* i que té, com el moviment brownià, la propietat de martingala.

Cal observar que si bé per als processos simples la definició de la integral estocàstica en (4.1) es fa fixant el paràmetre d'atzar ω, l'extensió a processos de $L^2_{a,T}$ no té aquesta peculiaritat, donat que, en obtenir-se com a límit en la convergència en mitjana quadràtica, es fa una mitjana en l'espai Ω. Per tant, la integral estocàstica no és una integral trajectorial.

5. Integral estocàstica i sumes de Riemann

El segon terme de (4.2) recorda una suma de Riemann i, per tant, podríem dir que la definició de la integral en (4.3) és un límit d'expressions similars a sumes de Riemann. En aquesta secció qüestionem aquesta afirmació.

Suposem que el procés integrand F té trajectòries contínues. Considerem una successió de particions de l'interval $[0, T]$, $(\Pi_n)_{n\geq 1}$, tal que la successió de normes tendeix a zero, és a dir, en augmentar n, la distància entre dos punts consecutius de la partició tendeix a zero. Aleshores, associat a cada partició $\Pi_n = \{0 = t_0 < t_1^{(n)} < \cdots < t_{r_n}^{(n)} = T\}$, podem definir el procés simple

$$F_n(t,\omega) = \sum_{k=1}^{r_n} F(t_{k-1}^{(n)}, \omega) 1_{(t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}]}(t).$$

Es pot demostrar que la successió

$$\int_0^T F_n(s,\omega)\, dB(s,\omega) = \sum_{k=1}^{r_n} F(t_{k-1}^{(n)}, \omega)\Big[B(t_k^{(n)}, \omega) - B(t_{k-1}^{(n)}, \omega)\Big], \quad n \geq 1,$$

convergeix cap a la integral estocàstica $\int_0^T F(s,\omega)\, dB(s,\omega)$. En el cas particular $F = B$, el límit es pot calcular explícitament. El seu valor és

$$\int_0^T B(s)\, dB(s) = \frac{1}{2}[B^2(t) - t], \tag{5.1}$$

on, per simplificar la notació, hem eliminat la referència a l'argument ω.

Si canviem la successió $F_n(t,\omega)$ per

$$\bar{F}_n = \sum_{k=1}^{r_n} F\left(\frac{1}{2}(t_{k-1}^{(n)} + t_k^{(n)}), \omega\right) 1_{(t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}]}(t),$$

la successió de sumes de Riemann

$$\sum_{k=1}^{r_n} F\left(\frac{1}{2}(t_{k-1}^{(n)} + t_k^{(n)}), \omega\right) \Big[B(t_k^{(n)}, \omega) - B(t_{k-1}^{(n)}, \omega)\Big], \quad n \geq 1,$$

també convergeix, però ho fa cap a una variable aleatòria diferent de $\int_0^T F(s)\, dB(s)$, que designarem amb $\int_0^T F(s) \circ dB(s)$. El mateix límit s'obté si es considera la successió de sumes de Riemann

$$\sum_{k=1}^{r_n} \frac{1}{2}\Big(F(t_{k-1}^{(n)}, \omega) + F(t_k^{(n)}, \omega)\Big)\Big[B(t_k^{(n)}, \omega) - B(t_{k-1}^{(n)}, \omega)\Big],$$
$$n \geq 1. \quad (5.2)$$

Per exemple, tornant al cas particular $F = B$, trobem

$$\int_0^T B(s) \circ dB(s) = \frac{1}{2} B^2(t). \quad (5.3)$$

Veiem, doncs, que, a diferència de la integral de Riemann, la integral estocàstica de processos amb trajectòries contínues és sensible al canvi en les successions que les aproximen.

La integral estocàstica $\int_0^T F(s) \circ dB(s)$ s'anomena *integral de Stratonovitch*. Fou introduïda en [25].

De les expressions (5.1) i (5.3), en deduïm la relació entre les integrals en el sentit d'Itô i de Stratonovitch,

$$\int_0^T B(s) \circ dB(s) = \int_0^T B(s)\, dB(s) + \frac{t}{2}. \quad (5.4)$$

La fórmula (5.4) és una conseqüència d'un resultat més general sobre aproximació de la integral estocàstica per sumes de tipus Riemann, com expliquem tot seguit. Per simplificar, suposem $T = 1$ i eliminem la referència a l'argument ω. Considerem una mesura μ en $[0, 1]$ i una successió de particions $(\Pi_n)_{n\geq 1}$, com més amunt. Definim la successió de sumes de Riemann generalitzades associades a $(\Pi_n)_{n\geq 1}$,

$$S_n^\mu = \sum_{k=1}^{r_n} \left[\int_0^1 \Big(F(t_{k-1}^{(n)}) + s(F(t_k^{(n)}) - F(t_{k-1}^{(n)}))\Big)\, d\mu(s)\right]$$
$$\times \Big[B(t_k^{(n)}) - B(t_{k-1}^{(n)})\Big]. \quad (5.5)$$

La successió $(S_n^\mu)_{n\geq 1}$ convergeix en probabilitat cap a

$$\int_0^T F(s)\,dB(s) + \left(\int_0^1 s\,d\mu(s)\right)\langle F, B\rangle, \tag{5.6}$$

on el terme $\langle F, B\rangle$ és el límit en probabilitat de la successió

$$\sum_{k=1}^{r_n}\Big[F(t_k^{(n)}) - F(t_{k-1}^{(n)})\Big]\Big[B(t_k^{(n)}) - B(t_{k-1}^{(n)})\Big],$$

i s'anomena *variació mixta* de F i B.

Observem que si $\mu=\delta_{\frac{1}{2}}$, la mesura de Dirac en $\frac{1}{2}$, les successions definides en (5.5) i (5.2) coincideixen. En aquest cas, el factor $\int_0^1 s\,d\mu(s)$ val $\frac{1}{2}$ i obtenim la fórmula

$$\int_0^T F(s)\circ dB(s) = \int_0^T F(s)\,dB(s) + \frac{1}{2}\langle F, B\rangle, \tag{5.7}$$

que generalitza (5.4).

La diferència entre les fórmules (5.1) i (5.3) o, més en general, la identitat (5.7) obeeixen al fet que el càlcul estocàstic associat a la integral d'Itô és d'ordre dos (els increments infinitesimals d'ordre dos de l'integrador donen una contribució positiva), mentre que per a la integral de Stratonovitch és d'ordre u. En la secció 6 retrobarem i explicarem millor aquesta diferència.

En aquest punt podríem estar temptats de dir que el càlcul de Stratonovitch és més natural, ja que es comporta com el càlcul diferencial ordinari. Això no és així. El càlcul de Stratonovitch requereix hipòtesis més fortes sobre els processos i, endemés, no gaudeix de propietats que es consideren intrínseques a una teoria d'integració. No entrarem en més detalls sobre aquestes afirmacions perquè aniríem més enllà del caràcter informal que volem donar a aquesta presentació.

6. El càlcul d'Itô: un càlcul d'ordre dos

Un dels resultats més fonamentals, útils i celebrats del càlcul estocàstic és la *fórmula d'Itô*, també anomenada *fórmula del canvi de* *variable* quan es fa referència a les seves versions més generals. De manera abreujada, aquesta fórmula diu que si componem una semimartingala X amb una funció determinista f prou regular, el procés $f(X)$ és també una semimartingala, i els termes de la seva descomposició —la component martingala i la de variació fitada— tenen unes expressions explícites en forma d'integrals. En aquesta secció presentarem un cas particular de la fórmula d'Itô i donarem algunes idees de la seva demostració. D'aquesta manera, esperem clarificar el significat del *càlcul d'ordre dos* del títol d'aquesta secció.

Considerem una funció $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable amb continuïtat fins a l'ordre dos. La fórmula d'Itô estableix que, per tot $0 \leq a \leq t$,

$$f(B(t)) = f(B(a)) + \int_a^t f'(B(s))\, dB(s) + \frac{1}{2}\int_a^t f''(B(s))\, ds. \tag{6.1}$$

Observem immediatament que si $f(x) = x^2$, l'expressió (6.1) és idèntica a (5.1). Notem també que per una funció $t \mapsto g(t)$ amb variació fitada, el càlcul clàssic dona l'expressió

$$f(g(t)) = f(g(a)) + \int_a^t f'(g(s))\, d(g(s)). \tag{6.2}$$

Per tant, comparant les fórmules (6.1) i (6.2), veiem que la diferència es troba en el terme que té la derivada segona f''. Això té el seu fonament en la propietat següent del moviment brownià.

Considerem, com al començament de la secció 5, una successió de particions de l'interval $[0,t]$, $(\Pi_n)_{n\geq 1}$, tal que la successió de normes tendeix a zero. Posem $\Pi_n = \{0 = t_0 < t_1^{(n)} < \cdots < t_{r_n}^{(n)} = t\}$, encara que a partir d'ara ometrem el superíndex (n), per alleugerir la notació.

A partir de càlculs explícits i senzills sobre lleis normals, es demostra que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{r_n-1} \Big[B(t_{i+1}) - B(t_i)\Big]^2 = t, \tag{6.3}$$

en la convergència de l'espai $L^2(\Omega)$.

Aquest resultat expressa que la variació quadràtica del moviment brownià és un procés determinista —la funció $f(t) = t$— i contrasta amb el següent,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{r_n-1} [t_{i+1} - t_i]^2 = 0.$$

Si imaginem que els increments $B(t_{i+1}) - B(t_i)$ donen una *mesura* dels intervals $[t_i, t_{i+1}]$, i comparem aquesta mesura amb la de Lebesgue (la longitud), veiem que mentre que aquesta última té variació d'ordre dos nul·la en tot interval finit, la del moviment brownià no la té.

Com que les trajectòries del moviment brownià són funcions contínues, de (6.3) se'n dedueix que, per a qualsevol nombre natural $m \geq 3$,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{r_n-1} \Big[B(t_{i+1}) - B(t_i)\Big]^m = 0, \tag{6.4}$$

en la convergència quasi segura (prenent, si cal, una subsuccessió $(n_k)_k \geq 1$).

Donarem ara algunes idees de la demostració de (6.1). Per simplificar, suposem $a = 0$. Considerem la successió de particions $\Pi_n = \{0 = t_0 < t_1^{(n)} < \cdots < t_{r_n}^{(n)} = t\}$, $n \geq 1$, que hem descrit més amunt. Escrivim la descomposició evident

$$f(B(t)) - f(B(0)) = \sum_{i=0}^{r_n-1} \Big[f(B(t_{i+1})) - f(B(t_i))\Big],$$

on hem fixat l'argument ω (q. s.).

Aplicarem ara un desenvolupament de Taylor fins a l'ordre dos a cadascun dels termes de la suma. Podríem pensar que l'elecció de l'ordre en el desenvolupament està predeterminada per les hipòtesis sobre f, però, en realitat, el motiu és un altre. No és necessari incrementar l'ordre de diferenciabilitat de f i continuar el desenvolupament més enllà de l'ordre dos, perquè els termes que obtindríem tendirien a zero, degut a la propietat (6.4). Seguint aquest procediment, es té

$$f(B(t_{i+1})) - f(B(t_i)) = T_1^{i,n} + T_2^{i,n},$$

on

$$T_1^{i,n} = f'(B(t_i))\Big[B(t_{i+1}) - B(t_i)\Big],$$

$$T_2^{i,n} = \frac{1}{2} f''(B_i^n)\Big[B(t_{i+1}) - B(t_i)\Big]^2;$$

aquí, B_i^n designa un punt situat en l'interval real determinat pels valors $B(t_i)$ i $B(t_{i+1})$.

Atès que el procés $(F(t) = f(B(t)),\, t \geq 0)$ té trajectòries contínues, ja hem esmentat abans que

$$\sum_{i=0}^{r_n-1} T_1^{i,n} \longrightarrow \int_0^t f'(B(s))\, dB(s), \tag{6.5}$$

en la convergència en probabilitat.

Utilitzant (6.3), podem demostrar

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{r_n-1} T_2^{i,n} \longrightarrow \int_0^t f''(B(s))\, ds. \tag{6.6}$$

La igualtat (6.1) s'obté de (6.5) i (6.6).

Existeixen versions molt més generals de la fórmula d'Itô que la que acabem de presentar.

Per exemple, considerem $f\colon [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i suposem que és diferenciable amb continuïtat, una vegada respecte al primer argument i dues vegades respecte al segon. Utilitzant idees similars a les anteriors, es pot demostrar la fórmula

$$\begin{aligned} f(t, B(t)) = f(a, B(a)) &+ \int_a^t \partial_s f(s, B(s))\, ds \\ &+ \int_a^t \partial_x f(s, B(s))\, dB(s) + \frac{1}{2}\int_a^t \partial_{xx}^2 f(s, B(s))\, ds. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Acabem aquesta secció presentant una altra versió de la fórmula d'Itô amb un integrador més general que el moviment brownià. Considerem una semimartingala amb trajectòries contínues i descomposició $X = M + A$, on M és una martingala contínua i A un procés de variació total fitada, també continu. Sigui f una funció real, com en (6.1). Aleshores,

$$f(X(t))=f(X(a))+\int_a^t f'(X(s))\,dX(s)+\frac{1}{2}\int_a^t f''(X(s))\,d\langle X\rangle(s). \quad (6.8)$$

En el terme de la dreta d'aquesta identitat, $dX(s) = dM(s) + dA(s)$, i la integral és la suma de la integral estocàstica respecte de M i respecte de A. Pel que fa a la primera (respecte de M), és una extensió de la integral d'Itô que hem introduït en la secció 4. La segona (respecte de A) és una integral de Lebesgue-Stieltjes, i és trajectorial. Respecte a la segona integral en (6.8), l'integrador és un procés amb trajectòries creixents que s'obté de manera anàloga a (6.3), substituint el moviment brownià per X. S'anomena *variació quadràtica* de X. Donat que A té variació fitada, resulta que

$$\langle X\rangle(t) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{r_n-1}\Big[X(t_{i+1}) - X(t_i)\Big]^2 \quad (6.9)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{r_n-1}\Big[M(t_{i+1}) - M(t_i)\Big]^2, \quad (6.10)$$

i aquest límit existeix (en la convergència de $L^2(\Omega)$).

Són moltes les aplicacions de la fórmula d'Itô. D'una banda, és utilitzada en la demostració de resultats importants del càlcul estocàstic: per exemple, en el teorema de Girsanov per a la determinació de lleis de processos estocàstics obtinguts per translació de processos gaussians, o en la demostració de les desigualtats fonamentals de Burkholder, Davis i Gundy per a integrals estocàstiques. D'altra banda, com veurem en la secció 7, permet trobar solucions d'equacions diferencials estocàstiques i estudiar-ne les propietats.

Finalment, volem mencionar que, per simplicitat, només hem parlat de fórmules d'Itô per a processos reals. Utilitzant la fórmula de Taylor multidimensional, es poden estendre les versions que hem presentat aquí a processos estocàstics multidimensionals. Això és necessari, per exemple, per poder donar una representació en forma d'integrals al producte de semimartingales.

7. Equacions diferencials estocàstiques

Segons el càlcul clàssic, les equacions diferencials ordinàries (EDO) descriuen l'estat de sistemes (físics, químics, biològics, econòmics, etc.) al llarg del temps; les anomenem *sistemes dinàmics*. Al començament de la secció 2, hem donat un exemple de sistema dinàmic que descriu l'evolució d'una població (vegeu (2.1)). Aquestes equacions són la formulació de principis científics, com per exemple el de la gravitació universal de Newton, o bé de resultats experimentals. En aquest darrer cas, l'equació és una proposta de model matemàtic i estableix un pont entre la *realitat* i les *matemàtiques*.

De la mateixa definició de les EDO (ens tornem a referir a (2.1)), se'n dedueix que les observacions ($p(t)$ en l'equació (2.1)) són funcions diferenciables del temps i, per tant, força regulars.

En moltes aplicacions, però, les observacions presenten oscil·lacions i irregularitats que no s'expliquen satisfactòriament amb EDO. Sembla, doncs, necessari introduir equacions diferencials que incorporin pertorbacions aleatòries per justificar adequadament observacions irregulars. Aquest és el paper de les equacions diferencials estocàstiques, que, d'ara endavant, designarem amb EDE.

Per mantenir la simplicitat en les notacions i l'exposició, considerem únicament processos reals, però les EDE (7.1) i (7.2) que escrivim tot seguit també poden formular-se en un context multidimensional.

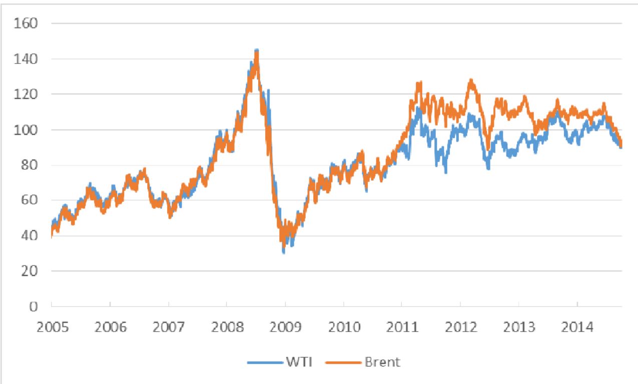


Figura 3. Evolució del preu del petroli.
Autor: Desconegut.
Font: *Econbrowser*.

Una EDE és una expressió formal,

$$\begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} &= b(X(t)) + \sigma(X(t))\xi(t), \quad t > 0, \\ X(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{7.1}$$

on $b, \sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ i $\xi = (\xi(t),\, t \geq 0)$ és un procés estocàstic que representa el *soroll* o les oscil·lacions degudes a efectes aleatoris. Un exemple fonamental i molt utilitzat de procés ξ és el *soroll blanc*. Descriu la suma de molts impulsos independents al llarg del temps. Utilitzant la teoria matemàtica de les distribucions de Schwartz, es pot donar sentit a l'expressió

$$B(t) = \int_0^t \xi(s)\, ds,$$

és a dir, el soroll blanc és la derivada (generalitzada) del moviment brownià. Aleshores, l'equació (7.1) s'escriu

$$\begin{aligned} dX(t) &= b(X(t))\, dt + \sigma(X(t))\, dB(t), \quad t > 0, \\ X(0) &= x_0. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Arribats a aquest punt, és natural que ens sentim una mica incòmodes per la manca de rigor. Com podem parlar de derivada (o de diferencial) d'un procés com el moviment brownià, per al qual aquests conceptes fallen? Hem repetit diverses vegades que el moviment brownià no és diferenciable en el sentit del càlcul diferencial clàssic. Ara bé, en el marc de la teoria de la integració estocàstica d'Itô, que hem exposat breument en la secció 4, podem donar una formulació rigorosa a l'EDE (7.2), i, amb extensions de la teoria d'Itô, podríem també donarne a EDE pertorbades per processos més generals, com per exemple les martingales contínues.

En efecte, integrant l'equació, podem escriure (7.2) de la manera equivalent

$$X(t) = x_0 + \int_0^t b(X(s))\, dt + \int_0^t \sigma(X(s))\, dB(s). \tag{7.3}$$

Per interpretar aquesta equació, cal fixar el tipus d'integrals. Suposem que la primera, respecte a dt, és una integral usual (de Lebesgue o de Riemann) que calculem fixant l'argument d'atzar ω. Pel que fa a la segona, considerem la integral estocàstica d'Itô respecte del moviment brownià.

7.1. *Exemples d'EDE*

Les EDE més senzilles són aquelles en les quals b i σ són funcions afins. S'anomenen *EDE lineals*. A banda de la simplicitat, una altra característica interessant és que es pot donar una forma explícita de la seva solució. Vegem-ne alguns exemples.

7.1.1. El model de Black i Scholes en finances

Els economistes Black i Scholes (1973) van estudiar el problema de determinar el preu i la cobertura d'actius financers que s'anomenen *opcions*. Amb aquest objectiu, van utilitzar un model que fou introduït per Paul Samuelson (1915-2009), guardonat amb el Premi Nobel d'Economia de 1970, segons el qual el preu $S(t)$ d'una acció en el mercat de borsa evoluciona d'acord amb l'EDE

$$dS(t) = \mu S(t)\,dt + \sigma S(t)\,dB(t), \quad t > 0; \quad S(0) = S_0. \tag{7.4}$$

En aquesta equació, μ i σ són nombres reals, i $(B(t), t \geq 0)$ és un moviment brownià. El paràmetre σ indica la variabilitat del mercat i s'anomena *volatilitat*. El moviment brownià modelitza les fluctuacions del mercat.

Per $\sigma = 0$ i $S_0 = 1$, la solució de (7.4) és $S(t) = \exp(\mu t)$, i el model correspon a l'evolució del preu d'un actiu amb valor inicial igual a una unitat, a un interès constant μ.

Aplicant una fórmula d'Itô (6.7), es comprova que el procés

$$S(t) = S_0 \exp\left(\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma B(t)\right), \quad t \geq 0,$$

és una solució de (7.4). Això vol dir que satisfà la igualtat

$$S(t) = S_0 + \mu \int_0^t S(r)\,dr + \sigma \int_0^t S(r)\,dB(r), \quad t \geq 0, \quad \text{q. s.}$$

La proposta de Black i Scholes va obrir una àrea molt interessant, a la frontera entre les matemàtiques i les finances, d'aplicació del càlcul d'Itô a altres disciplines. Cal esmentar Louis Bachelier (1900) com a iniciador d'aquesta aventura.

7.1.2. L'equació de Langevin

El físic francès Paul Langevin va estudiar, com Einstein, el moviment d'una partícula browniana. En el seu model va introduir els efectes de la coincidència de dos fenòmens: la difusió de les partícules i la fricció entre elles. Considerem dos nombres reals positius b i σ, que representen els coeficients de fricció i de difusió, respectivament, i que depenen de la massa de la partícula. Aleshores, si $X(t)$ designa l'estat de la partícula (posició) al llarg del temps, Langevin va descriure la seva velocitat mitjançant l'EDE

$$dX(t) = -bX(t)\,dt + \sigma\xi(t)\,dt, \quad t > 0; \quad X(0) = x_0, \tag{7.5}$$

on $(\xi(t),\, t \geq 0)$ és un soroll blanc independent del moviment de la partícula browniana que estem estudiant. Com hem vist abans, el soroll blanc s'identifica amb la derivada en el sentit de les distribucions d'un (altre) moviment brownià B.

L'equació de Langevin és també una EDE lineal, però és una mica més senzilla que el model de Black i Scholes (7.4). Com en aquell cas, aplicant la fórmula d'Itô, pot demostrar-se que

$$X(t) = x_0 \exp(-bt) + \sigma \int_0^t \exp(-b(t-s))\,dB(s), \quad t \geq 0,$$

és una solució de (7.5).

7.2. *Existència i unicitat de solucions*

Clarament, les EDE són una extensió de les EDO. Per tant, en general, no podem pas esperar resoldre-les explícitament. En els dos exemples de la secció 7.1, això ha estat possible perquè són EDE lineals. Dues qüestions fonamentals en la teoria de les EDE són l'existència i la unicitat de solucions. El marc probabilista, més ric que el determinista, ens ofereix diverses possibilitats d'elecció de concepte de *solució* i també d'*unicitat*. En aquesta presentació triarem les més properes a les conegudes en EDO. Així, sense abandonar l'estil informal que hem promès mantenir, definim la *solució* de (7.2) en l'interval $[0, T]$ com un procés tal que les dues integrals del terme de la dreta de (7.3) tenen sentit i, a més, es compleix la identitat (7.3) per a tot $t \in [0, T]$ quasi segurament, és a dir, per a un conjunt de trajectòries del procés X de probabilitat zero. Pel que fa a la *unicitat*, la formularem en sentit trajectorial: si existeixen dos processos solució d'una EDE fixada (en el sentit que acabem d'expressar), aleshores, necessàriament, les seves trajectòries han de ser idèntiques (quasi segurament).

En matemàtiques, la solució d'equacions està sovint relacionada amb la noció de *punt fix* i amb l'aplicació de teoremes sobre aquest concepte. El teorema fonamental d'existència i unicitat de solució de l'equació (7.2), en el sentit que hem donat a aquestes dues nocions en el paràgraf anterior, diu que si el valor inicial x_0 és un nombre real (determinista), i si les funcions b, σ són Lipschitz contínues, és a dir, compleixen

$$\sup_{u \neq v} \frac{|b(u) - b(v)| + |\sigma(u) - \sigma(v)|}{|u - v|} \leq L,$$

per a alguna constant $L > 0$, aleshores l'equació (7.2) (o equivalentment, (7.3)) té una única solució.

Aquest resultat es prova amb un mètode anàleg a l'utilitzat en la teoria de les EDO: introduint la successió de les iterades de Picard i fent servir tècniques de l'anàlisi estocàstica per demostrar la seva convergència en un sentit adequat.

8. Equacions diferencials estocàstiques, processos de Markov i densitats

En la secció 7 hem vist que les EDE sorgeixen de manera natural en el procés de modelització matemàtica: per exemple, en qüestions relacionades amb els mercats financers o l'evolució de poblacions. Aquest aspecte té molt d'interès en matemàtica aplicada i en tornarem a parlar més endavant.

Ara bé, el càlcul d'Itô es va desenvolupar bàsicament motivat per problemes interns a la teoria dels processos estocàstics. Juntament amb les martingales, els processos de Markov exerceixen un paper central en aquesta teoria. El seu nom fa referència al matemàtic rus A. A. Markov (1856-1922), que fou qui els va introduir. La propietat característica d'aquests processos és la independència condicional, que diu que el futur, que podem descriure a partir del procés $X(s)$, $s \geq t_0$, és independent del passat, $X(s)$, $0 \leq s \leq t_0$, si coneixem el present $X(t_0)$. Aquesta noció de *memòria concentrada en el present* es pot formalitzar utilitzant una família de σ-àlgebres $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, com la que hem introduït en descriure la teoria de la integració estocàstica. El moviment brownià i, més generalment, les solucions de les EDE (7.3) tenen la propietat de Markov.

Un concepte important en la teoria dels processos de Markov és el de *generador infinitesimal*. Es defineix com l'operador

$$\mathcal{L}f(x) := \lim_{t\to 0} \frac{E(f(x + X(t)) - f(x))}{t}, \tag{8.1}$$

on f és una funció real prou regular, i $x = X(0)$, sempre que aquest límit existeixi. L'operador $\mathcal{L}$ és com una derivada en sentit probabilista.

Durant la primera meitat del segle passat, influïda per l'enfocament d'Einstein i Langevin sobre el moviment brownià, l'anàlisi dels processos estocàstics es basava sobretot en l'estudi de les lleis de probabilitat associades. Observem que, conegudes aquestes, el càlcul del terme de la dreta de (8.1) és factible. Per exemple, per al moviment brownià decalat mitjançant $x \in \mathbb{R}$, $(B(t)+x,\, t \geq 0)$, pot demostrar-se que

$$\lim_{t\to 0} \frac{E(f(B_t + x) - f(x))}{t} = \frac{1}{2} f''(x), \tag{8.2}$$

on f'' representa la derivada segona de la funció f. És a dir, $\mathcal{L}$, l'operador de Laplace. El fet que la densitat de probabilitat del moviment brownià sigui la solució de l'equació de la calor està clarament relacionat amb (8.2).

Utilitzant la fórmula d'Itô, es pot fer una demostració directa de (8.2) sense utilitzar densitats de probabilitat. Aquesta és una observació important, ja que permet abordar una generalització del resultat (8.2). En efecte, mitjançant la fórmula d'Itô també es pot identificar el generador infinitesimal de la solució de (7.3).

Resumint. El càlcul d'Itô dona sentit a les EDE. Les solucions d'EDE són processos de Markov. Mitjançant la fórmula d'Itô, es poden calcular els generadors infinitesimals d'aquests processos. Aquests són operadors diferencials de segon ordre que descriuen un comportament infinitesimal en sentit probabilista. Per exemple, per al moviment brownià, el generador infinitesimal és l'operador de Laplace. Això permet establir una connexió entre EDE i equacions en derivades parcials (EDP) en la direcció següent: si les solucions d'EDE són variables aleatòries amb densitat, aquestes satisfan equacions en derivades parcials definides per l'operador diferencial, que és el generador infinitesimal del procés de Markov solució de l'EDE. Cap a l'any 1940, aquesta relació ja era coneguda.

La creació del càlcul d'Itô fou motivada pel problema invers del que acabem de descriure. Concretament, Itô es va plantejar investigar com es pot construir un procés de Markov a partir del seu generador infinitesimal. És així que va arribar a una expressió del tipus (7.2) i, per donar-li sentit, va desenvolupar el càlcul estocàstic.

Més amunt hem fet esment de l'interès de l'existència de densitats de probabilitat per a la solució d'una EDE. Per al moviment brownià, que pot veure's com la solució de (7.3) amb $b = 0$, $\sigma = 1$, sabem que, per a tot $t > 0$, la llei de $B(t)$ té una densitat $N(0, t)$. En general, però, no es pot assegurar que les densitats de les solucions d'EDE existeixin. L'estudi d'aquest problema no és trivial i, almenys pel que sabem fins avui, requereix eines complexes. Aquestes foren desenvolupades majoritàriament per Paul Malliavin (1925-2010) i formen un cos teòric que es coneix amb el nom de *càlcul de variacions estocàstic* o *càlcul de Malliavin*. Es tracta també d'un càlcul diferencial estocàstic, però de caràcter totalment diferent del càlcul d'Itô. En el càlcul de Malliavin, els objectes bàsics són funcions (o millor dit, funcionals) de les trajectòries del moviment brownià i el concepte de derivada correspon a una pertorbació d'aquestes. És un càlcul diferencial en dimensió infinita.

9. Un càlcul determinista per a trajectòries irregulars

Una equació diferencial ordinària (EDO) és una expressió de la forma

$$\frac{dY(t)}{dt} = f(Y(t)), \quad t \in (0,\infty); \quad Y(0) = y_0.$$

Les *equacions diferencials ordinàries amb control* (EDOC) són un cas particular d'EDO. Es defineixen de la manera següent. Considerem una funció diferenciable $t \mapsto Z(t)$, que anomenem *control*. Aleshores,

$$\frac{dY(t)}{dt} = b(Y(t)) + \sigma(Y(t))\frac{dZ(t)}{dt}, \quad t \in (0,\infty); \quad Y(0) = y_0, \quad (9.1)$$

és una EDOC amb control donat per la funció Z. En aquesta equació (en general, multidimensional), la funció Y representa el resultat de les observacions d'un sistema dinàmic (per exemple, la percepció d'un so a la còclea) i Z és un control o estímul extern que també depèn del temps (per exemple, la pressió de l'aire). La relació entre el control i l'estat del sistema l'estableixen les funcions b i σ. En general, aquesta relació és complexa i es descriu mitjançant funcions no lineals.

Observem que (9.1) i (7.1) coincideixen si $\frac{dZ(t)}{dt}$ és el soroll $\xi(t)$. La teoria de control estudia problemes relacionats amb equacions com (9.1), suposant que Z és una funció determinista regular, per exemple, diferenciable. Les equacions diferencials estocàstiques d'Itô poden interpretar-se com a equacions diferencials amb control aleatori, que pot ser un moviment brownià o, més generalment, una semimartingala.

Cap a finals dels anys noranta, Terry Lyons, un matemàtic del Regne Unit, va posar les bases d'una nova teoria anomenada *rough path analysis* (anàlisi amb trajectòries irregulars), que té com a objectiu unificar i complementar els dos punts de vista —el determinista i l'estocàstic. En aquesta secció explicarem la motivació de la teoria i descriurem el resultat clau: la continuïtat de l'aplicació d'Itô.

9.1. *Motivacions de l'anàlisi amb trajectòries irregulars*

En la construcció de la integral d'Itô, la propietat de martingala del moviment brownià hi té un paper fonamental. És la base de la propietat d'isometria que permet l'extensió de la definició de la integral per a processos simples a processos més generals.

Hi ha, però, processos estocàstics que no són semimartingales però que, per les seves propietats, són candidats molt adients per actuar com a controls aleatoris (en la terminologia que hem introduït més amunt) o pertorbacions aleatòries (en els termes de la secció 7). Un exemple n'és el *moviment brownià fraccionari*, B^H. Aquest procés depèn d'un paràmetre $H \in (0,1)$, que s'anomena *paràmetre de Hurst* i és l'exponent de Hölder de les seves trajectòries. Si $H = \frac{1}{2}$, coincideix amb el moviment brownià, que és un procés amb increments independents i té la propietat de Markov. Aquest és l'únic valor de H per al qual B^H és una semimartingala. En el cas $H > \frac{1}{2}$, les trajectòries del procés són més regulars que les del moviment brownià; endemés, els increments tenen correlació positiva i, a diferència dels processos de Markov, B^H té memòria *llarga.* Per a $H < \frac{1}{2}$, les trajectòries del procés són més irregulars que les del moviment brownià, els increments tenen correlació negativa i el procés té una propietat d'intermitència. Altres exemples de controls aleatoris naturals són classes de processos de Markov que apareixen en problemes de la difusió de la calor en medis aleatoris. En cap d'aquests exemples el càlcul d'Itô no és aplicable.

Una propietat desitjable en les equacions (9.1) és la continuïtat de la resposta Y respecte al control Z. S'espera que si hi ha petites variacions en la funció de control, les de la resposta també siguin petites. En particular, si es considera una successió d'aproximacions de Z, $(Z_n)_{n\geq 1}$, la successió de respostes $(Y_n)_{n\geq 1}$ corresponent hauria de convergir cap a Y. Per simplificar l'exposició, considerem $b = 0$ en (9.1). Aleshores podem formular més precisament aquesta propietat de la manera següent.

Considerem el funcional I^σ tal que $I^\sigma(Z) = Y$, on

$$\frac{dY(t)}{dt} = \sigma(Y(t))\frac{dZ(t)}{dt}, \quad t \in (0,\infty); \quad Y(0) = y_0,$$

o, equivalentment,

$$Y(t) = y_0 + \int_0^t \sigma(Y(s))\, dZ(s), \tag{9.2}$$

encara que, per ara, no sabem gaire bé quin és el sentit de la integral en (9.2).

Observem que I^σ està definit en un espai de funcions o en un espai de processos aleatoris. Per exemple, en el cas d'una equació d'Itô, com que les trajectòries del moviment brownià són contínues (més precisament α-Hölder contínues d'ordre $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$), una elecció per al domini de I^σ podria ser l'espai de les funcions contínues amb la topologia de la convergència uniforme sobre els compactes. Aleshores, en aquest cas particular, la propietat «desitjable» que hem esmentat en el paràgraf anterior és simplement la continuïtat de I^σ en aquest espai. Seguint la terminologia de Terry Lyons, anomenarem I^σ el *funcional d'Itô*.

Un dels inconvenients de la teoria d'Itô és que la propietat anterior de continuïtat no és certa, llevat de situacions molt particulars. Aquest és un teorema que no pretenem discutir aquí amb detall. Alternativament, esbossem un exemple que il·lustra aquests comentaris (vegeu [7, secció 6.5]). Considerem l'equació (7.4) del model de Black i Scholes, que té per solució

$$S(t) = S_0 \exp\left(\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma B(t)\right), \quad t \geq 0. \tag{9.3}$$

Considerem una successió d'aproximacions regulars de les trajectòries del moviment brownià, $(B_n)_{n\geq 1}$. Per exemple, l'obtinguda per interpolació lineal. Aleshores, per cada $n \geq 1$, l'equació

$$dS_n(t) = \mu S_n(t)\,dt + \sigma S_n(t)\,dB_n(t), \quad t > 0; \quad S_n(0) = S_0,$$

és, per cada valor de l'argument ω, una EDO que té per solució

$$S_n(t) = S_0 \exp(\mu t + \sigma B_n(t)).$$

Notem que

$$\bar{S}(t) := \lim_{n\to\infty} S_n(t) = S_0 \exp(\mu t + \sigma B(t)),$$

valor que no coincideix amb l'expressió de $S(t)$ donada en (9.3). El procés $(\bar{S}(t),\, t \geq 0)$ és la solució de l'EDE en el sentit de Stratonovitch,

$$d\bar{S}(t) = \mu \bar{S}(t)\,dt + \sigma \bar{S}(t) \circ dB(t), \quad t > 0; \quad S(0) = S_0.$$

Aquest exemple ens mostra que la manca de continuïtat del funcional d'Itô està relacionada amb la sensibilitat respecte a les aproximacions d'integrals estocàstiques per sumes de Riemann.

9.2. *Les idees fonamentals del càlcul per a trajectòries irregulars*

El càlcul integral per a trajectòries irregulars de Terry Lyons «enriqueix» els ingredients de partida —el control i la topologia en l'espai on viuen les trajectòries—, de manera que, en el nou escenari, el funcional I^σ és continu.

FOTOGRAFIA 2. Professor Terry Lyons.
FONT: Oxford-Man Institute of Quantitative Finance.

Per simplificar la redacció, anomenarem RPA (inicials de *rough path analysis*) el càlcul per a trajectòries irregulars. L'RPA se sustenta en dos pilars: la teoria d'integració de Young per a funcions Hölder contínues ([26]) i una teoria algebraica de resolució d'EDO de Kuo-Tsai Chen ([3, 4]).

La integral de Young dona sentit a integrals del tipus $\int_0^t \varphi(s)\, d\psi(s)$ per a funcions φ, ψ que són Hölder contínues de grau α i β, respectivament, com a límit de sumes de Riemann, sempre que es compleixi la condició $\alpha+\beta > 1$. És una integració determinista i, en conseqüència, es pot utilitzar per integrar processos estocàstics de manera trajectorial, sense que sigui necessari que es compleixin condicions de tipus probabilista, com la de semimartingala. Observem, però, que la integral $\int_0^t B(s)\,dB(s)$ no entra dins de l'àmbit d'aplicació d'aquesta integral, donat que, en aquest cas, $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

En la teoria RPA, l'objectiu central és demostrar la continuïtat del funcional d'Itô. No té la pretensió de crear una teoria general d'integració que estengui la d'Itô i que permeti considerar integrands molt generals, sinó donar sentit a la integral que trobem al terme de la dreta de (9.2), en la qual l'integrand i l'integrador estan relacionats per una equació. Aquesta observació fonamental permet implementar, de manera aproximada i amb un control exacte de l'error, el mètode de Young per donar una definició rigorosa de $\int_0^t \sigma(Y(s))\,dZ(s)$. La idea és que, suposant que σ té una certa regularitat, les oscil·lacions de Z i de Y estan relacionades, com es deriva de desenvolupaments de Taylor.

L'altra idea bàsica de l'RPA té l'origen en els treballs de Chen als quals ens hem referit més amunt. S'hi utilitzen desenvolupaments amb integrals iterades del control per estudiar la regularitat de l'estat del sistema. Això incideix en la noció d'*enriquiment* (en anglès, *enhancement*) del control i en la topologia que cal considerar per tal que el funcional d'Itô sigui continu.

Tot seguit, donem algunes idees de com s'obté el funcional d'Itô. Per començar, cal suposar que el control Z és una funció (determinista) que té variació d'ordre p fitada. Designarem amb $[p]$ la part entera de p. A partir de Z es construeix un objecte $(\bar{Z}, \mathbb{Z})$ que té $[p]$ components, que són funcions deterministes. La primera component està formada simplement per increments de Z. Es pot entendre com una integral sobre intervals de la funció constant igual a 1 respecte de Z. En casos particulars, les components de $\mathbb{Z}$ són límits d'integrals iterades de Z d'ordre $2, \ldots, [p]$, en una topologia relacionada amb variacions d'ordre p_i, on p_i depèn de l'índex que descriu les components. Així s'obté un objecte que s'anomena *trajectòria irregular enriquida*. La manera de construir-lo és intrínseca, és a dir, no depèn dels ingredients del problema de control on l'apliquem (la condició inicial i els coeficients de l'equació).

Per exemple, per al moviment brownià d-dimensional, la *trajectòria enriquida* $(B, \mathbb{B})$ té dues components (recordem que la variació quadràtica del moviment brownià és finita) i la component $\mathbb{B}$ és l'àrea de Paul Lévy. En components,

$$\mathbb{B}^{i,j}(s,t) = \int_s^t (B^i(r) - B^i(s))\, dB^j(r), \quad i,j = 1,\ldots,d.$$

El *funcional d'Itô* es defineix com l'aplicació

$$I^\sigma((Z,\mathbb{Z})(\omega)) = Y(\omega).$$

El resultat central de la teoria estableix la continuïtat d'aquesta aplicació en la topologia sobre les trajectòries enriquides. Amb ell es complementa brillantment la teoria d'Itô i s'obre la porta a una perspectiva més àmplia.

La construcció del funcional d'Itô i la prova de la seva continuïtat són purament deterministes. Quan s'aplica la teoria a EDE, les tècniques de processos i d'anàlisi estocàstica s'utilitzen en la construcció de la trajectòria irregular enriquida. No es requereix la condició d'adaptabilitat. Alguns problemes importants de l'anàlisi estocàstica, com l'estudi de les grans desviacions o la caracterització del suport topològic de la llei de la solució d'EDE, poden reduir-se, gràcies a la continuïtat del funcional d'Itô, a l'estudi de les mateixes qüestions pel procés de les trajectòries enriquides.

La teoria RPA ha donat un nou impuls a l'anàlisi estocàstica i, especialment, a noves connexions amb altres camps. Per exemple, la teoria quàntica de camps, la teoria ergòdica no markoviana i el càlcul de Malliavin.

10. Un esbós d'introducció a la teoria de les estructures regulars

Els ingredients en les definicions de les EDE i les EDO són objectes matemàtics de dimensió finita, bàsicament, processos estocàstics multidimensionals i funcions vectorials. Fins ara ens hem mogut en aquest marc, ja sigui amb un enfocament aleatori, amb el càlcul d'Itô, o amb un enfocament determinista, amb la teoria RPA introduïda en la secció 9.

En aquesta secció fem un salt qualitatiu important. Centrem l'interès en objectes més complexos que les EDO: les equacions en derivades parcials (EDP). Com hem esmentat en la secció 2, les EDP descriuen sistemes que evolucionen respecte d'un paràmetre multidimensional, que habitualment representa el temps i l'espai, t, x, respectivament. Un exemple fonamental d'EDP és l'equació de la calor (vegeu (2.2)).

De manera similar a les EDE, les equacions en derivades parcials estocàstiques (EDPE) es defineixen a partir d'EDP afegint-hi una pertorbació aleatòria. Per exemple, l'expressió

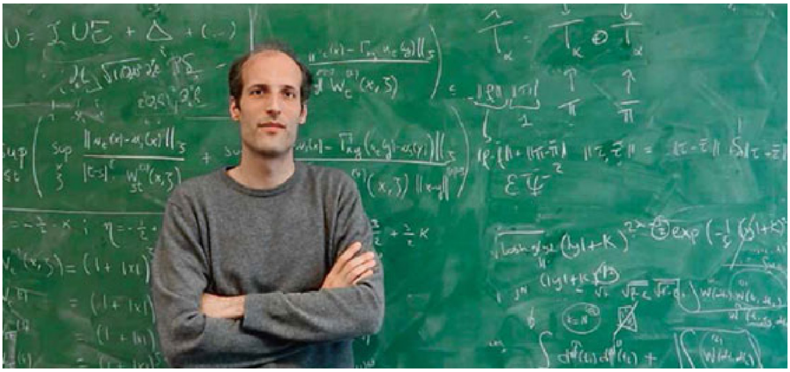
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) &= \dot{W}(t,x), \quad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) &= \delta_0, \qquad\qquad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{10.1}$$

on $(\dot{W}(t,x), (t,x) \in [0,\infty)\times\mathbb{R})$ és un soroll blanc en espai i temps, és una equació de la calor estocàstica sobre $\mathbb{R}$.

Prenent com a paràmetre de referència el temps, en contrast amb les EDO i les EDE, la descripció d'EDP o EDPE comporta objectes matemàtics que tenen dimensió infinita: per cada t són funcions de x.

Quines motivacions i quin interès hi ha darrere l'estudi de les EDPE? Certament n'hi ha d'estrictament matemàtics o especulatius. Però, de fet, les EDPE sorgeixen de manera natural en la descripció de fenòmens físics en la intersecció de dues escales d'observacions, entre l'escala microscòpica o atòmica i la macroscòpica. En la primera escala, les fluctuacions són enormes i és pràcticament impossible fer-ne una descripció acurada. En la segona escala, es fan mitjanes de les observacions, amb la qual cosa l'aleatorietat desapareix. Matemàticament, això correspon a fer una renormalització (o canvi d'escala) d'acord amb la llei dels grans nombres. Hi ha, però, escales intermèdies, per exemple, les que corresponen a les del teorema del límit central, anomenades *mesoscòpiques*, en les quals les fluctuacions aleatòries s'aproximen a un soroll gaussià. És d'aquesta manera que s'obtenen equacions com la (10.1). Un problema genèric important és entendre com es fa la transició des de les diferents escales, i això comporta necessàriament un coneixement profund dels dos models, l'estocàstic i el determinista.

Fa aproximadament uns deu anys, quan la teoria RPA ja havia assolit un grau de desenvolupament notable, van sorgir intents de crearne una extensió en dimensió infinita, amb la motivació d'estudiar des d'una òptica trajectorial exemples d'equacions en derivades parcials estocàstiques. El gran assoliment va arribar l'any 2014, amb la *teoria de les estructures regulars*, creada pel matemàtic austríac resident al Regne Unit Martin Hairer. Per aquesta teoria, Hairer va guanyar la Medalla Fields 2014, la medalla internacional per a descobriments excel·lents en matemàtiques atorgada a científics d'edat inferior als quaranta anys.



FOTOGRAFIA 3. Professor Martin Hairer.
FONT I COPYRIGHT: Simons Foundation and International Mathematical Union.

La teoria de les estructures regulars es va desenvolupar al voltant de l'estudi de l'equació KPZ de la física. El nom de l'equació fa referència als científics Mehran Kardar, Giorgio Parisi i Yi-Cheng Zhang, els quals la van adoptar per descriure l'evolució d'una interfície en creixement. Ara bé, fins als descobriments de Hairer, no se sabia donar-li un sentit matemàtic. Amb el llenguatge que hem introduït més amunt, aquesta equació correspon a les observacions a escala mesoscòpica i té l'expressió

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) - \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) = \left(\frac{\partial}{\partial x}u(t,x)\right)^2 + \dot{W}(t,x), \qquad (10.2)$$

amb condicions inicial i de contorn (si cal) donades, on ν és una constant i, com abans, $(\dot{W}(t,x),(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R})$ és un soroll blanc en espai i temps. Recentment, s'ha descobert que aquesta equació té també una *propietat d'universalitat*, igual que, en un context enormement més senzill, la té la distribució normal.

En la descripció matemàtica de l'equació KPZ, hi trobem diversos problemes. Per una banda, hi ha una incoherència entre el que se suposa que ha de representar i com es representa. En altres paraules, l'evolució de la interfície és irregular i no sembla raonable imposar que sigui diferenciable, que és la condició que es necessita per donar sentit a l'EDP. D'altra banda, fins i tot utilitzant la teoria de les distribucions de Schwartz, no es pot donar un sentit rigorós a l'equació, a causa de la presència del terme quadràtic. Com en el cas de l'equació d'Itô, es necessita un nou model i una nova teoria.

La teoria de les estructures regulars proporciona una perspectiva i un mètode per tractar aquestes i altres qüestions. En el punt de partida del seu desenvolupament, s'hi troben les idees de la teoria RPA, en particular, la reformulació feta per Massimiliano Gubinelli en [10]. El seu àmbit d'aplicabilitat és molt extens i actualment és una de les línies de recerca amb més vitalitat en el camp de l'anàlisi estocàstica.

Referències

[1] Bachelier, L. «Théorie de la spéculation». *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 17 (1900), p. 21-86.

[2] Black, F.; Scholes, M. «The pricing of options and corporate liabilities». *J. Polit. Econ.*, 81 (3) (1973), p. 637-654.

[3] Chen, K.-T. «Integration of paths, geometric invariants and a generalized Baker-Hausdorff formula». *Ann. of Math. (2)*, 65 (1957), p. 163-178.

[4] Chen, K.-T. «Integration of paths—a faithful representation of paths by noncommutative formal power series». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 89 (1958), p. 395-407.

[5] Donsker, M. D. «An invariance principle for certain probability limit theorems». *Mem. Amer. Math. Soc.*, 6 (1951). 12 p.

[6] Einstein, A. «Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen». *Ann. Physik (4)*, 17 (1905), p. 549-560.

[7] Evans, L. C. *An Introduction to Stochastic Differential Equations.* Providence, RI: American Mathematical Society, 2013.

[8] Friz, P. K.; Hairer, M. *A Course on Rough Paths: With an Introduction to Regularity Structures.* Cham: Springer, 2014. (Universitext)

[9] Friz, P. K.; Victoir, N. B. *Multidimensional Stochastic Processes as Rough Paths: Theory and Applications.* Cambridge: Cambridge University Press, 2010. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics; 120)

[10] Gubinelli, M. «Controlling rough paths». *J. Funct. Anal.*, 216 (1) (2004), p. 86-140.

[11] Hairer, M. «Solving the KPZ equation». *Ann. of Math. (2)*, 178 (2) (2013), p. 559-664.

[12] Hairer, M. «A theory of regularity structures». *Invent. Math.*, 198 (2) (2014), p. 269-504.

[13] Itô, K. «Stochastic integral». *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 20 (1944), p. 519-524.

[14] Itô, K. «On stochastic differential equations». *Mem. Amer. Math. Soc.*, 4 (1951). 51 p.

[15] Karatzas, I.; Shreve, S. E. *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* 2a ed. Nova York: Springer-Verlag, 1991. (Graduate Texts in Mathematics; 113)

[16] Lamberton, D.; Lapeyre, B. *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. Londres: Chapman & Hall, 1996. [Traduït de l'original en francès de 1991 per Nicolas Rabeau i François Mantion]

[17] Le Gall, J.-F. *Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus*. Cham: Springer, 2016. (Graduate Texts in Mathematics; 274). [Traduït de l'edició en francès de 2013]

[18] Lévy, P. *Processus stochastiques et mouvement brownien*. París: Gauthier-Villars, 1948. [Amb una nota de M. Loève]

[19] Lyons, T. J. «Differential equations driven by rough signals». *Rev. Mat. Iberoamericana*, 14 (2) (1998), p. 215-310.

[20] Lyons, T.; Qian, Z. *System Control and Rough Paths*. Oxford: Oxford University Press, 2002. (Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications)

[21] Protter, P. E. *Stochastic Integration and Differential Equations*. 2a ed. Versió 2.1. Berlín: Springer-Verlag, 2005. (Stochastic Modelling and Applied Probability; 21)

[22] Revuz, D.; Yor, M. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. 3a ed. Berlín: Springer-Verlag, 1999. (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften; 293)

[23] Schilling, R. L.; Partzsch, L. *Brownian Motion. An Introduction to Stochastic Processes*. 2a ed. Berlín: De Gruyter, 2014. (De Gruyter Graduate). [Amb un capítol sobre simulació de Björn Böttcher]

[24] Smoluchowski, M. von «Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen». *Ann. Physik (4)*, 21 (1906), p. 756-780.

[25] Stratonovich, R. L. «A new representation for stochastic integrals and equations». *SIAM J. Control*, 4 (1966), p. 362-371.

[Traducció del rus d'un article publicat a *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Meh.*, 1 (1964), p. 3-12]

[26] YOUNG, L. C. «An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integration». *Acta Math.*, 67 (1) (1936), p. 251-282.

INSTITVT D'ESTVDIS CATALANS
MCMVII

9 788499 654096